

Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 1

Wstęp i σ -algebra zbiorów

- "Pandemiczne notatki z wykładu"
math.uwb.edu.pl/~zaf/kwasniewski/teaching
 - G. Plebanek "'Miara i całka"' skrypt
-
- S. Łojasiewicz, Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych, PWN, 1987
 - A. Birkholc, Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych, PWN 1986
 - W. Rudin, Analiza rzeczywista i zespolona, PWN, Warszawa, 2009.



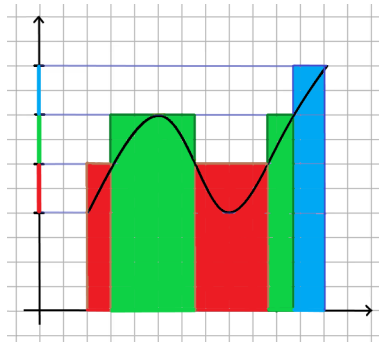
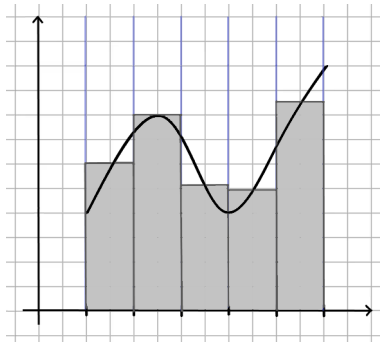
Riemann



Lebesgue

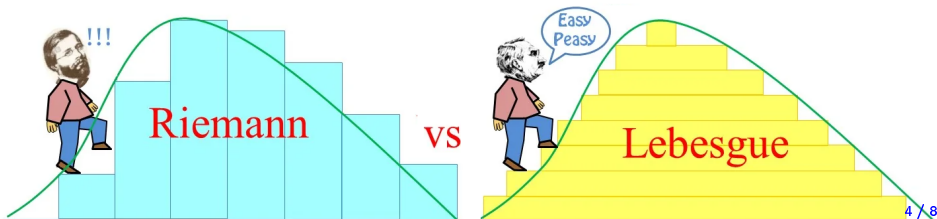
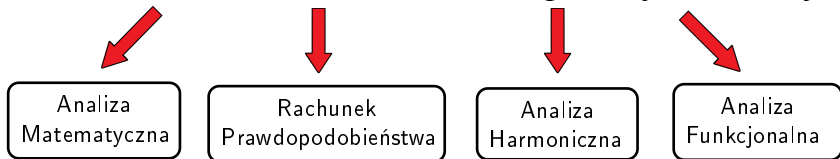


Każdy porządny kasjer liczy w ten drugi sposób



Przewagi Całki Lebesgue'a nad Riemanna

- Większa klasa funkcji całkowlanych
- Możliwość całkowania względem ogólnych miar
- Twierdzenia o przechodzeniu z granicą pod całkę



X - zbiór, 2^X - rodzina wszystkich podzbiorów X (zbiór potęgowy)

Def. σ -algebrą na X nazywamy rodzinę \mathcal{F} podzbiorów X taką, że

Ⓐ $X \in \mathcal{F}$ (zawiera całą przestrzeń)

Ⓑ $A \in \mathcal{F} \implies A' := X \setminus A \in \mathcal{F}$ (zamknięta na dopełnienia)

Ⓒ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (zamknięta na sumy ciągów)

Parę (X, \mathcal{F}) nazywamy **przestrzenią mierzalną**, a elementy \mathcal{F} nazywamy zbiorami mierzalnymi.

Na Probabilistyce σ -**ciało** = σ -**algebra**, zdarzenie = zbiór mierzalny



Uw. σ -**algebra** zawsze zawiera \emptyset, X , jest zamknięta na skończone operacje teoriomnogościowe oraz **przeliczalne sumy i przekroje**.

Zbiór A jest **przeliczalny** $\iff A$ jest skończony lub równoliczny z \mathbb{N}
(czyli $|A| \leq |\mathbb{N}| =: \aleph_0$)

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ - przeliczalne; $\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, 2^X$ nieprzeliczalne (X nieskończ.)

Stw. Jeśli \mathcal{F} jest σ -algebrą, to

- i $\emptyset \in \mathcal{F}$ (zawiera zbiór pusty)
- ii $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$ (zamknięta na skończone sumy)
- iii $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (zamknięta na przekroje ciągów)
- iv $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$ (zamknięta na skończone przekroje)

Dowód: (i) $X \in \mathcal{F}$ z $(\Sigma 1)$. Zatem $\emptyset = X \setminus X = X' \in \mathcal{F}$ z $(\Sigma 2)$.

(ii) Jeśli $A, B \in \mathcal{F}$, to kładąc $A_{2k-1} := A$ oraz $A_{2k} = B$ dla $k \in \mathbb{N}$, mamy $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ i stąd $A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ na mocy $(\Sigma 3)$.

(iii) Niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$. Z praw De Morgana otrzymujemy

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A'_n)' = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n \right)' \in \mathcal{F}$$

na mocy $(\Sigma 2)$ i $(\Sigma 3)$.

(iv) Można naśladować dowód (ii) lub (iii)



v \mathcal{F} zamknięta na różnice, gdyż $A \setminus B = A \cap B'$ patrz (iv) i $(\Sigma 2)$

- 1 2^X jest σ -algebrą (największa σ -algebra na X)
- 2 $\{\emptyset, X\}$ jest σ -algebrą (najmniejsza σ -algebra na X)
- 3 $\{\emptyset, A, X\}$ nie jest σ -algebrą (o ile $A \neq \emptyset, X$)
- 4 $\{\emptyset, A, A', X\}$ jest σ -algebrą (σ -algebra generowana przez A)
- 5 Jeśli \mathcal{F} jest σ -algebrą na X oraz $E \subseteq X$, to

$$\mathcal{F}_E := \{E \cap A : A \in \mathcal{F}\} \quad (\text{obcięcie } \mathcal{F} \text{ do } E)$$

jest σ -algebrą na E

- 6 Jeśli \mathcal{F} jest σ -algebrą na Y , to dla dowolnej funkcji $f : X \rightarrow Y$
 $f^{-1}(\mathcal{F}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}\}$ (przeciwwobraz \mathcal{F})

jest σ -algebrą na X

- 7 Obraz σ -algebry zazwyczaj nie jest σ -algebrą
- 8 Suma dwóch σ -algebr nie musi być σ -algebrą
- 9 **Przecięcie dowolnej ilości σ -algebr jest σ -algebrą!**



Stw. Dla każdej rodziny \mathcal{G} podzbiorów zbioru X istnieje najmniejsza σ -algebra $\sigma(\mathcal{G})$ na X zawierająca \mathcal{G} .

Dowód: Rozważmy następujące przecięcie

$$\sigma(\mathcal{G}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \text{ i } \mathcal{F} \text{ jest} \\ \sigma\text{-algebrą na } X}} \mathcal{F}$$

- 1 $\sigma(\mathcal{G})$ jest σ -algebrą (bo jest przecięciem σ -algebr)
- 2 $\sigma(\mathcal{G})$ zawiera \mathcal{G} (bo każda przecinana rodzina zawiera \mathcal{G})
- 3 $\sigma(\mathcal{G})$ zawiera się w każdej σ -algebrze \mathcal{F} zawierającej \mathcal{G} (bo jest przekrojem takich σ -algebr), czyli $\sigma(\mathcal{G})$ jest najmniejszą rodziną o własnościach (1), (2). ■

Def. $\sigma(\mathcal{G})$ nazywamy σ -algebrą generowaną przez \mathcal{G} .

Prz. Jeśli $A \subseteq X$, to $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, X, A, A'\}$.

Uw. $\sigma(\mathcal{H}) = \sigma(\mathcal{G}) \iff \mathcal{H} \subseteq \sigma(\mathcal{G})$ oraz $\mathcal{G} \subseteq \sigma(\mathcal{H})$